



**ХМЕЛЬНИЦЬКА ОБЛАСНА РАДА
ХМЕЛЬНИЦЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ УПРАВЛІННЯ ТА ПРАВА
ІМЕНІ ЛЕОНІДА ЮЗЬКОВА**

ЗАТВЕРДЖЕНО
Рішення методичної ради
університету
29 серпня 2024 року
Протокол № 1

Голова методичної ради

Ірина КОВТУН
(підпис)

(ініціали, прізвище)
29 серпня 2024 року
М.П.

**НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНІ МАТЕРІАЛИ
з навчальної дисципліни
«ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА»
для підготовки на першому освітньому рівні
здобувачів вищої освіти ступеня бакалавра
за спеціальністю 073 Менеджмент
галузі знань 07 Управління та адміністрування
за заочною формою навчання**

м. Хмельницький
2024

РОЗРОБНИК:

Доцентка кафедри фінансів, банківської справи,
страхування та фондового ринку,
кандидатка економічних наук, доцентка
26 серпня 2024 року

_____ Тетяна ФАСОЛЬКО

СХВАЛЕНО

Рішення кафедри фінансів, банківської справи,
страхування та фондового ринку
27 серпня 2024 року, протокол № 1

Завідувачка кафедри, кандидатка економічних
наук, доцентка
27 серпня 2024 року

_____ Алла КРУШИНСЬКА

Деканеса факультету управління та економіки,
кандидатка економічних наук, доцентка
28 серпня 2024 року

_____ Тетяна ТЕРЕЩЕНКО

ЗМІСТ

	Стор.
1. Структура вивчення навчальної дисципліни	— 4
1.1. Тематичний план навчальної дисципліни	— 4
1.2. Лекції	— 5
1.3. Семінарські заняття	— 7
1.4. Самостійна робота студентів	— 50
1.5. Підсумковий контроль	— 54
1.5.1. Питання для підсумкового контролю	— 54
1.5.2. Структура екзаменаційного білета	— 56
2. Схема нарахування балів	— 57
3. Рекомендовані джерела	— 59
4. Інформаційні ресурси в Інтернеті	— 59

1. Структура вивчення навчальної дисципліни

1.1. Тематичний план навчальної дисципліни

№ теми	Назва теми	Кількість годин											
		Денна форма навчання						Заочна форма навчання					
		Усього	у тому числі					Усього	у тому числі				
			Лекції	Сем. (прак).	Лабор.	Ін.зав.	СРС		Лекції	Сем. (прак).	Лабор.	Ін.зав.	СРС
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1.	Предмет та задачі дисципліни. Математична логіка. Розширення шкільних знань про числа. Елементи теорії визначників	6	2	2	–	–	2	8	1	1	–	–	6
2.	Основи теорії матриць	6	2	2	–	–	2	8	1	1	–	–	6
3.	Система лінійних алгебраїчних рівнянь	6	2	2	–	–	2	8	1	1	–	–	6
4.	Функціональна залежність. Основи теорії границь функції	6	2	2	–	–	2	8	1	1	–	–	6
5.	Неперервність функції. Визначні границі	8	2	2	–	–	4	6	–	–	–	–	6
6.	Похідна. Диференціал	8	2	2	–	–	4	7	1	–	–	–	6
7.	Основні теореми диференціального числення.	8	2	2	–	–	4	6	–	–	–	–	6
8.	Невизначений інтеграл. Комплексні числа.	8	2	2	–	–	4	8	1	1	–	–	6
9.	Інтегрування раціональних та ірраціональних виразів	8	2	2	–	–	4	7	1	–	–	–	6
10.	Визначений інтеграл.	8	2	2	–	–	4	6	–	–	–	–	6
11.	Числові ряди. Степеневі, тригонометричні, функціональні ряди	8	2	2	–	–	4	6	–	–	–	–	6
12.	Комбінаторика	8	2	2	–	–	4	8	1	1	–	–	6

13.	Основи теорії ймовірності	8	2	2	–	–	4	7	–	1	–	–	6
14.	Основні поняття математичного програмування.	8	2	2	–	–	4	9	1	–	–	–	8
15.	Лінійне програмування. Геометричний і симплексний методи розв'язування ЗЛП	8	2	2	–	–	4	9	–	1	–	–	8
16.	Транспортна задача. Метод потенціалів	8	2	2	–	–	4	9	1	–	–	–	8
	Всього годин:	120	32	32	–	–	56	120	10	8	–	–	102

1.2. Лекції

№ з/п	Назва і план теми	Денна форма
1	2	3
1	Предмет та задачі дисципліни. Математична логіка. Розширення шкільних знань про числа. Елементи теорії визначників	1
1.1.	Значення математичної освіти як важливої складової у системі фундаментальної підготовки сучасного менеджера. Приклади вибору математичних методів для розв'язування економічних задач	
1.2.	Множини: дійсні, раціональні та ірраціональні.	
1.3.	Булева алгебра: кон'юнкція, диз'юнкція, імплікація, еквіваленція.	
1.4.	Визначники другого і третього порядків. Визначники k-го порядку.	
1.5.	Властивості визначників.	
	Основи теорії матриць.	1
2.1.	Мінори і алгебраїчні доповнення. Розкладання визначника за елементами рядка або стовпця.	
2.2.	Види матриць. Елементарні перетворення матриць. Ранг матриці.	
2.3.	Добуток матриці. Обернена матриця. Добуток прямокутних матриць.	
2.4.	Додавання матриць і множення матриць на число.	
2.5.	Матричні рівняння.	
	Системи лінійних рівнянь.	1
3.1.	Поняття про системи лінійних рівнянь. Розв'язок системи лінійних рівнянь.	
3.2.	Сумісні і несумісні системи рівнянь. Визначені і невизначені системи лінійних рівнянь.	
3.3.	Розв'язування систем рівнянь методом послідовного виключення невідомих (методом Гауса).	
3.4.	Розв'язування систем рівнянь методом повного виключення невідомих (методом Жордано-Гауса).	
	Функціональна залежність. Границя функції	1
4.1.	Поняття функції. Способи задавання функції. Область визначення та область значень функції.	
4.2.	Властивості функцій: обмеженість і необмеженість, зростання й спадання функції, парність і непарність, періодичність.	

4.3.	Класифікація функцій. Елементарні функції та їх графіки. Поняття оберненої функції.	
4.4.	Числова послідовність. Означення границі послідовності. Нескінченно малі та великі величини. Означення границі функції. Односторонні границі. Властивості функцій, що мають скінченні границі.	
	Неперервність функції. Чудові границі	0
5.1.	Невизначені вирази. Границя монотонної функції.	
5.2.	Число e . Натуральні логарифми.	
5.3.	Означення неперервності функції в точці. Неперервність функції на відрізку.	
5.4.	Арифметичні операції над неперервними функціями. Класифікація розривів. Властивості неперервних функцій. Неперервність елементарних функцій.	
5.5.	Чудові границі границі. Необхідні границі.	
	Похідна. Диференціал	1
6.1.	Застосування похідної в економічних розрахунках.	
6.2.	Означення похідної. Геометричний, механічний та економічний зміст похідної.	
6.3.	Похідні елементарних функцій. Похідна оберненої функції. Таблиця похідних.	
6.4.	Правила обчислення похідних. Похідна складної функції. Односторонні похідні. Похідні вищих порядків.	
	Основні теореми диференціального числення.	0
7.1.	Визначення диференціалу. Диференціал суми, добутку і частки.	
7.2.	Інваріантність форми першого диференціалу.	
7.3.	Диференціали вищих порядків.	
7.4.	Основні теореми диференціального числення.	
	Невизначений інтеграл. Комплексні числа.	1
8.1.	Поняття первісної функції і невизначеного інтегралу. Застосування інтегралів у задачах економіки.	
8.2.	Геометричний і механічний зміст інтегралу.	
8.3.	Таблиця основних інтегралів. Найпростіші правила інтегрування.	
8.4.	Заміна змінної у невизначеному інтегралі. Інтегрування частинами.	
8.5.	Комплексні числа та дії над ними	
	Інтегрування раціональних та ірраціональних виразів	1
9.1.	Інтегрування раціональних дробів.	
9.2.	Інтегрування не правильних дробів.	
9.3.	Інтегрування ірраціональних виразів та виразів, що містять тригонометричні функції.	
9.4.	Тригонометричні підстановки	
	Визначений інтеграл. Невласні інтеграли. Кратні інтеграли	0
10.1.	Інтегральні суми. Умови існування визначеного інтегралу. Властивості визначеного інтегралу. Обчислення інтегралу. Формула Ньютона-Лейбніца.	
10.2.	Заміна змінної у визначеному інтегралі.	
10.3.	Інтегрування частинами.	

10.4.	Геометричні застосування визначеного інтегралу: обчислення площ, об'ємів тіл обертання, довжин дуг кривих.	
	Числові ряди	0
11.1.	Частинні суми ряду. Необхідна умова збіжності ряду.	
11.2.	Ряди з додатними членами.	
11.3.	Теорема порівняння рядів.	
11.4.	Достатні ознаки збіжності рядів із додатними членами: Даламбера. Коші, інтегральна ознака Маклорена-Коші	
	Комбінаторика	1
12.1.	Скінчені множини. Елементи комбінаторики.	
12.2.	Основні поняття комбінаторного аналізу.	
12.3.	Перестановки, розміщення, комбінації з повтореннями. Правила добутку та суми.	
	Основи теорії ймовірності	0
13.1.	Основні поняття теорії ймовірностей.	
13.2.	Теореми додавання і множення ймовірностей. Наслідки.	
13.3.	Формули повної ймовірності та Баєсса. Дискретні випадкові величини, їх закони розподілу та числові характеристики	
13.4.		
	Основні поняття математичного програмування	1
14.1.	Загальна постановка задач.	
14.2.	Економічні приклади моделей лінійного програмування (задача оптимального використання сировини, задача оптимізації виробничої програми).	
14.3.	Задача складання сумішей (раціону).	
	Лінійне програмування. Геометричний і симплексний методи розв'язування ЗЛП	0
15.1.	Задача лінійного програмування, форми її запису.	
15.2.	Дослідження задачі лінійного програмування. Основи симплекс-методу розв'язування задачі лінійного програмування.	
15.3.	Розв'язування задач лінійного програмування з допомогою MS Excel	
	Транспортна задача.	1
16.1.	Постановка транспортної задачі, умова існування її розв'язку.	
16.2.	Пошук оптимального плану перевезень за методом потенціалів.	
16.3.	Розв'язування транспортної задачі за допомогою MS Excel.	

1.3. Семінарські заняття

Семінарське заняття 1

Тема Предмет та задачі дисципліни. Математична логіка. Розширення шкільних знань про числа. Елементи теорії визначників. Основи теорії матриць.

Питання для усного опитування та дискусії

1. Значення математичної освіти як важливої складової у системі фундаментальної підготовки сучасного менеджера. Приклади вибору математичних методів для розв'язування економічних задач
2. Множини: дійсні, раціональні та ірраціональні.
3. Булева алгебра: кон'юнкція, диз'юнкція, імплікація, еквіваленція.
4. Визначники другого і третього порядків. Визначники k -го порядку.
5. Властивості визначників.

6. Мінори і алгебраїчні доповнення. Розкладання визначника за елементами рядка або стовпця.
7. Види матриць. Елементарні перетворення матриць. Ранг матриці.
8. Добуток матриці. Обернена матриця. Добуток прямокутних матриць.
9. Додавання матриць і множення матриць на число.
10. Матричні рівняння. Обернена матриця
11. Поняття про модель Леонтьєва.

Аудиторна письмова робота

Підключитися до Google Classroom. Код доступу надає викладач на лекціях.

Виконання студентами тестових та індивідуальних завдань з питань теми заняття. Семінарські/лабораторні та індивідуальні завдання містяться в Google Classroom в папці Семінарські/Лабораторні завдання.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є : дійсні, раціональні та ірраціональні числа, кон'юнкція, диз'юнкція, імплікація, еквіваленція. Висловлення та операції над ними. Логічні закони і відношення логічного слідування. Предикати. Область істинності предикатів. Операції над предикатами. Квантори. Теореми та їх види. Прями й обернені теореми. Необхідні й достатні умови. Визначники другого і третього порядків. Визначники k -го порядку. Властивості визначників, матриця, додавання матриць, множення матриці на число, добуток матриць, одинична матриця, невироджена матриця, мінор, алгебраїчне доповнення, обернена матриця

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах.

Життя людини у сучасному насиченому інформаційному просторі неможливе без знання передових інформаційних технологій. Розвиток останніх, неможливий без фундаментальних знань сукупності сучасних математичних методів аналізу та синтезу. Багато людей вважають, що математика ніяк не пов'язана з реальним життям, не цікава і важка для вивчення. Отже, з однієї сторони ми бачимо падіння інтересу до математики, а з іншого боку, ми живемо в більш математичному світі, більш кількісному, ніж будь-коли. Особливість математичних дисциплін полягає в їхній надзвичайній складності для сприйняття сучасними студентами, які жити не можуть без гаджетів, а також розуміння, що це можна використовувати в реальному житті. Питання, які повинні зустрітися в повсякденному житті. Наприклад, яка страхова програма вигідніша? Це не якась знеособлена модель. Це реальна модель, де ми можемо оптимізувати параметри. На скільки років мені потрібна страхівка? Як це впливає на платежі і відсоткові ставки? Розгляд економічних питань у процесі вивчення математики та задач з реальним економічним змістом дозволяють продемонструвати студентам наявність глибоких і плідних зв'язків між математикою і економікою, а через них - і взаємозв'язки математики з проблемами навколишнього світу, але це практично неможливо зробити без комп'ютера і ПЗ, яке візуалізує і моментально демонструє результати проробленої роботи:

Математична логіка - наука про закони математичного мислення.

Висловленням називають розповідне речення, про яке можна сказати, що воно або істинне, або хибне, але не одне й інше разом.

Кон'юнкцією (або логічним добутком) двох висловлень A і B називають висловлення, яке є істинним, коли кожне з висловлень A і B істинне, і є хибним, коли хоча б одне з них хибне.

Диз'юнкція Диз'юнкцією (або логічною сумою) двох висловлень А і В називають висловлення, яке є істинним, коли хоча б одне з висловлень А або В істинне, і є хибним, коли обидва хибні.

Імплікація Імплікацією (або логічним слідуванням) двох висловлень А і В називають таке висловлення А В, яке є хибним тоді і тільки тоді, коли А - істинне, а В - хибне.

Еквіваленцією двох висловлень А і В називається таке висловлення, яке істинне тоді і тільки тоді, коли обидва компоненти А і В однозначно істинні або однозначно хибні.

Приклад: Маріччі потрібно знати 4 екзамена, тоді сесія здана, в протилежному випадку не здана. Читається: « А еквівалентне В», «А *тоді і тільки тоді, коли* В».

№1: Навести кілька прикладів висловлень та їх заперечень.

№2: Навести кілька прикладів диз'юнкції двох висловлень.

№3: Навести кілька прикладів кон'юнкції двох висловлень.

№4: Навести кілька прикладів імплікації двох висловлень.

№5: Навести кілька прикладів еквіваленції двох висловлень.

Визначником (детермінантом) другого порядку називається вираз

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Приклад: розв'язати методом Крамера систему рівнянь

$$\begin{cases} 7x - 6y = 5 \\ 8x - 7y = -10 \end{cases}$$

Розв'язування.

$$\text{Маємо: } D = \begin{vmatrix} 7 & -6 \\ 8 & -7 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-7) - 8 \cdot (-6) = -1 (\neq 0),$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ -10 & -7 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-7) - (-6) \cdot (-10) = -95;$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 8 & -10 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-10) - 5 \cdot 8 = -110$$

Підставимо значення визначників, одержуємо розв'язок системи :

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-95}{-1} = 95;$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-110}{-1} = 110$$

Відповідь: формули (11) дають розв'язок системи (7): $x = 95; y = 110$.

Визначники третього порядку.

Визначником (детермінантом) третього порядку називається вираз

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

Приклад: обчислимо визначник $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix}$. Користуючись означенням,

$$\text{маємо: } D = 1 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (0 + 4) - 0 + 2(-2 - 0) = 4 - 4 = 0.$$

Приклад.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & 7 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 7 & 11 \end{vmatrix} = -55 + 14 = -41$$

(перший рядок множимо на (-2) і додаємо до другого; перший рядок множимо на 3 і додаємо до третього). Завдяки властивостям визначників для обчислення визначника третього порядку нам довелося обчислювати не три, а лише один визначник другого порядку.

Аналогічно тому, як ми ввели означення визначника третього порядку через визначники другого порядку, можна ввести поняття про визначники четвертого порядку через визначники третього порядку:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix} - d_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}$$

Практичне завдання: Для виконання завдання студент обирає варіант згідно наданими йому номером та параметром k .

Обчислити визначники двома способами: а) за допомогою елементарних перетворень;

б) розклавши за елементами рядка (стовпця).

$$1. \begin{vmatrix} k & k+1 & k+1 & k-9 \\ 2 & 3 & 0 & k+2 \\ -k & k+2 & -k-1 & 9-k \\ -1 & 2 & k+4 & 1 \end{vmatrix};$$

$$2. \begin{vmatrix} k+2 & 1 & 0 & k+3 \\ k-3 & k & 3 & 3-k \\ k+3 & k-2 & 4 & -k-3 \\ k-1 & 2 & k+2 & 1-k \end{vmatrix};$$

$$3. \begin{vmatrix} k-2 & 4 & -k & k-1 \\ k & k+2 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & -1 & k-2 \\ 2-k & -6 & k & 1-k \end{vmatrix};$$

$$4. \begin{vmatrix} k+2 & k & 0 & k+2 \\ k & k+4 & -1 & 4 \\ 5-k & 0 & -3 & 5-k \\ k+3 & 3 & -k & k+3 \end{vmatrix};$$

Міномор елемента визначника третього порядку, який одержується з даного визначника в результаті викреслювання строчки і стовпчика, на перетині яких стоїть даний елемент.

Наприклад, міномор елемента 5 визначника $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$ – це визначник

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 6 = 3.$$

Говорять, що **елемент займає парне місце**, якщо сума номерів його стрічки і стовпчика – число парне, і **непарне місце**, якщо сума номерів його стрічки і стовпчика – число непарне.

Наприклад, елемент 5 в попередньому прикладі займає непарне місце, бо знаходиться в 1-й стрічці і в 2-му стовпчику, а $1+2=3$ – число непарне.

Алгебраїчним доповненням (міномор із знаком) елемента визначника третього порядку називається міномор цього елемента, взятий із знаком “плюс”, якщо елемент займає парне місце, і із знаком “мінус”, якщо непарне місце.

Приклад, для визначника виду $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ алгебраїчне доповнення елемента a_1

– це число $A_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, алгебраїчне доповнення елемента b_3 – це число $B_3 = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

(алгебраїчне доповнення елементів позначаються відповідними великими буквами з тими ж самими індексами).

Якщо елементи визначника представлені як a_{ij} (i – номер строчки, j – номер

стовпчика), тобто якщо $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, то, позначивши через M_{ij} міномор елемента a_{ij} ,

через A_{ij} – алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} , маємо:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

(Тут $(-1)^{i+j}$ забезпечує зміну знаків: якщо $i+j$ – число парне, то $(-1)^{i+j} = 1$, а якщо $i+j$ – число непарне, то $(-1)^{i+j} = -1$).

Матриці та дії з ними

Матрицею називається прямокутна таблиця, складена з чисел або з функцій.

Приклад: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & -5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{pmatrix}.$

Цю таблицю записують в круглих або в квадратних дужках (на відміну від визначників). Розміри матриці записують так: $m \times n$, де m – число стрічок, n – число стовпчиків. Так, наведені вище матриці мають відповідно такі розміри: 3×2 ; 2×3 ; 2×2 .

Якщо число стрічок матриці дорівнює числу її стовпчиків, то матриця називається квадратною (остання з наведених матриць є квадратною матрицею другого порядку).

Матриця, у якій всього один стовпчик або одна стрічка, називається вектором. Матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю, називається нульовою. Квадратна матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю (крім, можливо, елементів, що стоять на головній діагоналі), називається діагональною. Квадратна матриця, у якій всі елементи на головній діагоналі дорівнюють одиниці, а інші – нулю, називається одиничною матрицею і позначається E (або I).

Обернена матриця.

Квадратна матриця називається невиродженою, якщо її визначник відмінний від нуля.

Матриця A^{-1} називається оберненою до матриці A , якщо виконуються умови:

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E,$$

де E – одинична матриця.

Можна довести, що будь-яка невироджена матриця має обернену, причому елементами оберненої матриці є алгебраїчні доповнення елементів транспонованої матриці до вихідної матриці A :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

$$2A + \frac{1}{2}B,$$

Практичне завдання: Знайти A^T , B^2 добутки матриць AB і BA , суму різницю $3AB - B$ та обернену до матриці B .

$$1. A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$3. A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & -1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$2. A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$4. A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Семінарське заняття 2

Тема. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Функціональна залежність. Границя функції і послідовності

Питання для усного опитування та дискусії

1. Поняття про системи лінійних рівнянь. Розв'язок системи лінійних рівнянь.
2. Сумісні і несумісні системи рівнянь. Визначені і невизначені системи лінійних рівнянь.
3. Розв'язування систем рівнянь методом послідовного виключення невідомих (методом Гауса).
4. Розв'язування систем рівнянь методом повного виключення невідомих (методом Жордано-Гауса).

5. Поняття функції. Способи задавання функції. Область визначення та область значень функції. Послідовність, її границя.
6. Границя функції однієї і багатьох змінних.
7. Основні теореми про границі.
8. Приклади відшукування границь.

Аудиторна письмова робота

Виконання студентами тестових та індивідуальних завдань з питань теми заняття. Семінарські/лабораторні та індивідуальні завдання містяться в Google Classroom в папці Семінарські/Лабораторні завдання.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є : формули Крамера, прямий хід метода Гаусса, зворотний хід метода Гауса, матричний метод, ранг матриці, метод обвідних мінорів, зведення матриці до трапецієвидної форми, теорема Кронекера – Капеллі, сумісність (несумісність) системи рівнянь, функція однієї змінної, функція багатьох змінних, послідовність, границя послідовності, границя функції однієї змінної, границя функції багатьох змінних, перша «чудова» границя, друга «чудова» границя, теореми про границі.

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах.

1. Метод Крамера.

Розглянемо систему трьох лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \quad (1)$$

Розв'язком системи (1) називається будь-яка трійка чисел $(x; y; z)$, яка задовольняє систему.

Введемо до розгляду визначник системи D , а також визначники D_x, D_y, D_z за формулами:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Якщо $D \neq 0$, то система (1) має єдиний розв'язок, що визначається формулами Крамера:

$$x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D}, z = \frac{D_z}{D} \quad (2)$$

(Якщо $D = 0$, то система (1) або несумісна, або має безліч розв'язків)

2. Метод Гаусса.

Існують і інші методи розв'язування систем рівнянь. Покажемо, як розв'язують систему n лінійних рівнянь з n невідомими методом Гаусса. (К. Гаусс, 1777 – 1855 – великий німецький математик); $n > 2$.

Проілюструємо метод Гаусса на прикладі, який ми розв'язали методом Крамера. (тут $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$). Перше рівняння системи є зведеним. Проілюструємо прямий хід метода Гаусса за допомогою перетворення таблиці коефіцієнтів вихідної системи:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 4 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & 10 \\ 0 & -7 & -6 & -14 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & -6 & -14 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Здійснюючи обернений хід, одержуємо: $z = 0$;

$$y + 0 = 2 \text{ (отже, } y = 2 \text{);}$$

$$x + 2 + 0 = 3 \text{ (отже, } x = 1 \text{).}$$

Обидві відповіді співпали.

3. Розв'язування систем матричним методом.

За допомогою матриць система трьох лінійних неоднорідних рівнянь з трьома невідомими запишеться так:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \text{ або}$$

$$AX = B$$

(тут A – матриця виду $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, X – вектор виду $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, B – вектор виду

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$). Припустимо, що $\det A \neq 0$.

Домножимо обидві частини рівняння (1) зліва на A^{-1} :

$$A^{-1}AX = A^{-1}B.$$

Оскільки, $A^{-1}A = E, EX = X$, одержуємо:

$$X = A^{-1}B$$

Зауважимо, що метод оберненої матриці (матричний метод) особливо зручний, коли потрібно розв'язати декілька систем рівнянь з однаковими лівими частинами та різними стовпчиками вільних членів – такі системи мають однакову обернену матрицю.

Практичне завдання: розв'язати системи рівнянь наступними методами:

а) за правилом Крамера; б) матричним способом; в) методом Гауса;

1.

$$\begin{cases} (k-4)x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ kx_1 + x_2 + 2x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x_1 + kx_2 - x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ -x_1 + (k-1)x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} -3x_1 + (k+1)x_2 + x_3 = 10, \\ 2x_1 + kx_2 - x_3 = -7, \\ -x_1 - x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 3x_1 + x_2 + kx_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + (k+10)x_3 = 6, \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 = -12. \end{cases}$$

Елементарною функцією називається функція, яка може бути заданою однією формулою виду $y = f(x)$, де вираз справа складений із основних елементарних функцій і сталих за допомогою скінченного числа операцій додавання, віднімання, множення, ділення і взяття функції від функції.

Алгебраїчною функцією називається будь-яка функція $y = f(x)$, яка задовольняє рівняння виду

$$P_0(x)y^n + P_1(x)y^{n-1} + \dots + P_n(x) = 0,$$

де $P_0, P_1, \dots, P_n$ – многочлени від x .

До алгебраїчних функцій належать такі елементарні функції:

а) ціла раціональна функція (многочлен)

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$$

(тут $a_0, a_1, \dots, a_n$ – коефіцієнти, n – ціле невід’ємне число – степінь многочлена);

б) дробово-раціональна функція

$$y = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m}$$

(тут a_i, b_j – коефіцієнти, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, n та m – цілі невід’ємні числа – степені многочленів у чисельнику і знаменнику);

Границя функції

Розглянемо функцію $y = f(x)$. Нехай залежна змінна x необмежено наближається до числа x_0 (це означає, що x приймає значення, як завгодно близькі до x_0 , але відмінні від x_0): $x \rightarrow x_0$.

Число A називається границею функції $y = f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, якщо для всіх значень x , що досить мало відрізняються від числа x_0 , відповідні значення функції $f(x)$ як завгодно мало відрізняються від числа A : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$. Інакше кажучи, якщо для будь-якого як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх $x \neq x_0$, які належать δ -околу точки x

$$|x - x_0| < \delta,$$

буде виконуватися нерівність

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

то число A є границею функції $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$. (Це – означення границі, запропоноване Коші).

Завдання. Знайти границю функції. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{5x + x^2 + 7}$;

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + 2}{\cos x - 1}$;
2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{2x - 3}$;
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x^2 - 2x + 1}$;

Семінарське заняття 3

Тема. Комбінаторика. Основи теорії ймовірності

Питання для усного опитування та дискусії

1. Скінчені множини. Елементи комбінаторики.
2. Основні поняття комбінаторного аналізу.
3. Перестановки, розміщення, комбінації з повтореннями.
4. Правила добутку та суми.
5. Основні поняття теорії ймовірностей.
6. Теореми додавання і множення ймовірностей. Наслідки.
7. Формули повної ймовірності та Баєсса. Дискретні випадкові величини, їх закони розподілу та числові характеристики

Аудиторна письмова робота

Виконання студентами тестових та індивідуальних завдань з питань теми заняття. Семінарські/лабораторні та індивідуальні завдання містяться в Google Classroom в папці Семінарські/Лабораторні завдання.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є : Перестановки, розміщення, комбінації з повтореннями Перестановки, розміщення, комбінації без повторень, ймовірність, повна ймовірність, випадкові величини, закон розподілу

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є :

Пригадаємо основні правила за якими виконують вибір тієї чи іншої комбінаторної формули в обчисленнях. Вам необхідно їх вивчити, щоб вільно застосовувати на практиці та не тлумачити як захочеться формули розміщень, перестановки та комбінації.

Елементи комбінаторики

Відомо два базових правила, за якими приймають рішення: якою формулою комбінаторики слід користуватися?

Чи це будуть комбінації, перестановки чи розміщення залежить від відповіді на два питання.

1) Чи враховується порядок розміщення елементів?

Якщо відповідь «ні» то застосовуємо формулу комбінацій.

Якщо «так», то маємо два варіанти, які залежать від відповіді на наступне питання:

2) Чи всі елементи входять у сполуку?

Якщо «так» то обчислюємо через перестановки, якщо «ні» застосовуємо формулу розміщень.

Щоб легше запам'ятались ці правила наведемо наступний рисунок, вивчивши який у Вас не виникатиме труднощів з основними комбінаторними задачами.

Вибір формули для обчислення кількості сполук



Правила комбінаторного додавання та комбінаторного множення

Правило комбінаторного множення є частковим випадком основного правила комбінаторики: Нехай необхідно виконати послідовно n дій. При цьому першу дію можна виконати k_1 способами, другу — k_2 способами і так далі до m -ї дії, яку можна виконати k_m способами. Тоді всі m дій можна виконати $k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_{m-1} \cdot k_m \cdot \dots \cdot k_m$ способами.

Варіант 1

1. Скількома способами можна вибрати 4 яблука із 10? (3 бали)
2. Скількома способами можна розподілити 3 різних путівки між 25 учнями? (3 бали)
3. Скількома способами можна сформувати поїзд з 8 вагонів? (3 бали)
4. Обчисліть: $C_6^4 + C_6^5 + C_6^6$.

Варіант 2

1. Скількома способами можна розподілити 3 однакових путівки між 25 учнями? (3 бали)
2. У класі навчається 10 юнаків. Скількома способами можна їх вишикувати у шеренгу?
3. Скількома способами із 20 студентів групи можна обрати голову, заступника голови і секретаря зборів?
4. Обчисліть: $C_5^3 + C_5^4 + C_5^5$.

Відповіді: 1. $C_{10}^4 = 219$. 2. $A_{25}^3 = 13\,800$. 3. $P_8 - 8! = 40\,320$. 4. 22.

2. $C_{25}^3 = 2300$. 2. $P_{10} = 10! = 3\,628\,800$. 3. $A_{20}^3 = 6840$. 4. 16.

Визначте вид сполуки, про яку йдеться мова в задачі, та запишіть відповідну формулу:

1. а) 25 викладачів потиснули один одному руки перед конференцією.. Скільки було зроблено рукоштовань?
б) 25 студентів обмінялися фотографіями так, що кожен обмінявся з кожним. Скільки було роздано фотографій?

Відповіді: а) $C_{25}^2 = 300$; б) $A_{25}^2 = 600$.

2. а) У групі з 32 студентів вибирають делегацію на конференцію, яка складається з трьох осіб. Скільки існує варіантів такого вибору?

- б) У класі з 25 студентів для проведення зборів обирають голову, заступника і секретаря. Скількома способами це можна зробити?

Відповіді: а) $C_{32}^2 = 4960$; б) $A_{12}^2 = 29\,760$.

3. а) Біля стола стоїть 9 стільців. Скільки існує способів розміщення за столом 9 осіб?
 б) 9 дівчат водять хоровод. Скільки існує для них різних варіантів стати в коло?
 в) 3 дев'яти різних намистин потрібно зробити намисто. Скільки існує різних способів його утворення?

Відповіді: а) $P_9 = 9!$; б) $\frac{P_9}{9}$ (кількість хороводів у 9 раз менша від P_9 , бо циклічні перестановки не змінюють хоровод); в) $\frac{P_9}{9 \cdot 2}$ (циклічні перестановки не змінюють намисто, а також намисто не зміниться, якщо перевернути його).

Задача. У групі 12 хлопців і 10 дівчат.

- а) Скількома способами можна вибрати одного студента цього класу?
 б) Скількома способам двох — хлопця і дівчину?
 в) Скількома способами можна вибрати дівчину?
 г) Уже вибрано одного студента. Скількома способами можна вибрати після цього хлопця і дівчину?

Виконання вправ

1. 7 книг різних авторів і трьохтомник одного автора розташовані на книжковій полиці. Скількома способами можна розставити ці 10 книжок на полиці так, щоб книги автора трьохтомника стояли поруч?
 Відповідь: $P_3 \cdot P_8 = 241\,920$.
2. Збори з 30 осіб обирають голову, секретаря та трьох членів редакційної комісії. Скількома способами це можна зробити?
 Відповідь: $A_{30}^2 \cdot C_{28}^3 = 2\,850\,120$.
3. У підрозділі 60 солдат і 5 офіцерів. Скількома способами можна виділити наряд, який складається із трьох солдат і одного офіцера?
 Відповідь: $C_{60}^3 \cdot C_5^1 = 171\,100$.
4. Із 10 троянд і 8 жоржин треба скласти букет так, щоб в ньому були 2 троянди і 3 жоржини. Скількома способами можна скласти букет?
 Відповідь: $C_{10}^2 \cdot C_8^3 = 2520$.
5. Із семи бігунів і трьох стрибунів треба скласти команду із 5 чоловік, в яку б входив хоч би один стрибун. Скількома способами це можна зробити?
 Відповідь: $C_7^4 C_3^1 + C_7^3 C_3^2 + C_7^2 C_3^3 = 231$.

Ймовірністю випадкової події називається відношення кількості елементарних подій, що сприяють цій події до загальної кількості подій простору елементарних подій.

Теорема: Ймовірність події А, яка може настати лише за умови появи однієї із попарно не сумісних подій повної групи Н, визначається за формулою:

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) + \dots + P(H_n)P_{H_n}(A),$$

або

$$P(A) = \sum P(H_i)P_{H_i}(A).$$

Формула називається формулою повної ймовірності.
 Події H_i називають гіпотезами;
 $P(H_i)$ — ймовірність гіпотез.

Задача 1. В урні лежать 20 кульок, з яких 12 білих, решта — чорні. З урни навмання виймають дві кульки. Яка ймовірність того, що вони білі?

Розв'язання

Загальна кількість елементарних подій випробування (вийнято дві кульки) дорівнює числу способів, якими можна вийняти 2 кульки із 20, тобто числу комбінацій із 20 елементів по 2 ($n = C_{20}^2$). Підрахуємо кількість елементарних подій, які сприяють події «вийнято дві білих кульки». Ця кількість дорівнює числу способів, якими можна вийняти 2 кульки із 12 білих, тобто числу комбінацій із 12 елементів по 2 ($m = C_{12}^2$).

Отже, якщо подія А — «вийнято дві білі кульки», то

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{12}^2}{C_{20}^2} = \frac{12 \cdot 11}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1 \cdot 2}{20 \cdot 19} = \frac{33}{95}$$

$$\text{Відповідь: } \frac{33}{95}.$$

Задача 2. В урні лежать 20 кульок, з яких 12 білих, решта — чорні. З урни навмання виймають три кульки. Яка ймовірність того, що серед вибраних дві кульки білі?

Розв'язання

Загальна кількість елементарних подій випробування (вийнято три кульки) дорівнює $n = C_{20}^3$.

Підрахуємо кількість елементарних подій, які сприяють події «серед трьох вибраних кульок дві білі». Дві білі кульки із 12 білих кульок можна вибрати C_{12}^2 способами, а одну чорну кульку можна вибрати 8 способами, тоді події «серед трьох вибраних кульок дві білі» сприяють $m = C_{12}^2 \cdot 8$ елементарних подій.

Отже, якщо подія А — «серед трьох вибраних кульок дві білі», то

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{12}^2 \cdot 8}{C_{20}^3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 8}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{20 \cdot 19 \cdot 18} = \frac{44}{95}$$

$$\text{Відповідь: } \frac{44}{95}.$$

Задача 3. В урні лежать 15 червоних, 9 синіх і 6 зелених кульок однакових на дотик. Навмання виймають 6 кульок. Яка ймовірність того, що вийнято: 1 зелену, 2 синіх і 3 червоних кульки?

Розв'язання

В цій задачі випробування полягає в тому, що із урни виймають 6 кульок. Вийняти шість кульок із $15 + 9 + 6 = 30$ кульок можна $n = C_{30}^6$ способами. Нас цікавить ймовірність події А — «вийнято 1 зелену, 2 синіх і 3 червоних кульки». Одну зелену кульку можна вийняти C_6^1 способами, 2 синіх кульки можна вийняти C_9^2 способами, 3 червоних кульки можна вийняти C_{15}^3 способами. Отже, події А сприяють $m = C_6^1 \cdot C_9^2 \cdot C_{15}^3$ елементарних подій. Тоді

$$P(A) = \frac{C_{15}^3 \cdot C_9^2 \cdot C_6^1}{C_{30}^6} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25} = \frac{24}{145}$$

$$\text{Відповідь: } \frac{24}{145}.$$

Розв'язування завдань:

Завдання 1 Навмання складається букет із трьох квіток. Серед квіток є 6 айстр, 5 троянд та 3 ромашки.

Знайти ймовірність того, що букет складається:

- а) із трьох троянд;
- б) із трьох ромашок;
- в) із 1 троянди, 1 ромашки та 1 айстри.

Завдання 2 Студент знає 20 питань із 25 програми. Знайти ймовірність, що студент із трьох запитань відповів:

- а) на одне запитання;
- б) на всі запитання;
- в) не відповів на жодне.

Завдання 3. На контроль надійшли вироби, які виготовлені трьома робітниками. Перший виготовив 20 виробів, серед яких 4% браку, другий – 30 виробів, в яких 1% браку, а третій – 50, серед яких 5% браку. Взята навмання деталь виявилась бракованою.

Знайти ймовірність того, що виріб виготовив 3-й робітник.

Завдання 4. Ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,51. Знайти ймовірність того, що серед 100 народжених:

- а) рівно 50 хлопчиків;
- б) не менше 30 і не більше 70.

Завдання 5. Верстат-автомат штампує деталі. Ймовірність того, що за зміну не буде випущено жодної нестандартної деталі, дорівнює 0,9. Знайдіть ймовірність того, що за три зміни не буде випущено жодної нестандартної деталі.

6. А) Скількома способами можна скласти розклад перездачі 5 заліків.

Б) У спортивній команді, яка складається з 22 чоловік, треба обрати капітана і його заступника. Скількома способами це можна зробити?

В) Скількома способами можна розмістити 6 хлопців та 7 дівчат у гуртожитку в тримісній, чотиримісній та ще двох Змісних кімнатах.

Ймовірністю випадкової події називається відношення кількості елементарних подій, що сприяють цій події до загальної кількості подій простору елементарних подій.

Теорема: Ймовірність події А, яка може настати лише за умови появи однієї із попарно не сумісних подій повної групи Н, визначається за формулою:

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) + \dots + P(H_n)P_{H_n}(A),$$

або

$$P(A) = \sum P(H_i)P_{H_i}(A).$$

Формула називається формулою повної ймовірності. Події H_i називають гіпотезами;

$P(H_i)$ – ймовірність гіпотез.

Задача 1. В урні лежать 20 кульок, з яких 12 білих, решта — чорні. З урни навмання виймають дві кульки. Яка ймовірність того, що вони білі?

Розв'язання

Загальна кількість елементарних подій випробування (вийнято дві кульки) дорівнює числу способів, якими можна вийняти 2 кульки із 20, тобто числу комбінацій із 20 елементів по 2 ($n = C_{20}^2$). Підрахуємо кількість елементарних подій, які сприяють події «вийнято дві білих кульки». Ця кількість дорівнює числу способів, якими можна вийняти 2 кульки із 12 білих, тобто числу комбінацій із 12 елементів по 2 ($m = C_{12}^2$).

Отже, якщо подія А — «вийнято дві білі кульки», то

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{12}^2}{C_{20}^2} = \frac{12 \cdot 11}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1 \cdot 2}{20 \cdot 19} = \frac{33}{95}$$

$$\text{Відповідь: } \frac{33}{95}.$$

Задача 2. В урні лежать 20 кульок, з яких 12 білих, решта — чорні. З урни навмання виймають три кульки. Яка ймовірність того, що серед вибраних дві кульки білі?

Розв'язання

Загальна кількість елементарних подій випробування (вийнято три кульки) дорівнює $n = C_{20}^3$.

Підрахуємо кількість елементарних подій, які сприяють події «серед трьох вибраних кульок дві білі». Дві білі кульки із 12 білих кульок можна вибрати C_{12}^2 способами, а одну чорну кульку можна вибрати 8 способами, тоді події «серед трьох вибраних кульок дві білі» сприяють $m = C_{12}^2 \cdot 8$ елементарних подій.

Отже, якщо подія А — «серед трьох вибраних кульок дві білі», то

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{12}^2 \cdot 8}{C_{20}^3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 8}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{20 \cdot 19 \cdot 18} = \frac{44}{95}$$

$$\text{Відповідь: } \frac{44}{95}.$$

Задача 3. В урні лежать 15 червоних, 9 синіх і 6 зелених кульок однакових на дотик. Навмання виймають 6 кульок. Яка ймовірність того, що вийнято: 1 зелену, 2 синіх і 3 червоних кульки?

Розв'язання

В цій задачі випробування полягає в тому, що із урни виймають 6 кульок. Вийняти шість кульок із $15 + 9 + 6 = 30$ кульок можна $n = C_{30}^6$ способами. Нас цікавить ймовірність події А — «вийнято 1 зелену, 2 синіх і 3 червоних кульки». Одну зелену кульку можна вийняти C_6^1 способами, 2 синіх кульки можна вийняти C_9^2 способами, 3 червоних кульки можна вийняти C_{15}^3 способами. Отже, події А сприяють $m = C_6^1 \cdot C_9^2 \cdot C_{15}^3$ елементарних подій. Тоді

$$P(A) = \frac{C_{15}^3 \cdot C_9^2 \cdot C_6^1}{C_{30}^6} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25} = \frac{24}{145}$$

$$\text{Відповідь: } \frac{24}{145}.$$

Розв'язування завдань:

Завдання 1 Навмання складається букет із трьох квіток. Серед квіток є 6 айстр, 5 троянд та 3 ромашки.

Знайти ймовірність того, що букет складається:

- а) із трьох троянд;
- б) із трьох ромашок;
- в) із 1 троянди, 1 ромашки та 1 айстри.

Завдання 2 Студент знає 20 питань із 25 програми. Знайти ймовірність, що студент із трьох запитань відповів:

- а) на одне запитання;
- б) на всі запитання;

- в) не відповів на жодне.

Завдання 3. На контроль надійшли вироби, які виготовлені трьома робітниками. Перший виготовив 20 виробів, серед яких 4% браку, другий – 30 виробів, в яких 1% браку, а третій – 50, серед яких 5% браку. Взята навмання деталь виявилась бракованою.

Знайти ймовірність того, що виріб виготовив 3-й робітник.

Завдання 4. Ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,51. Знайти ймовірність того, що серед 100 народжених:

- а) рівно 50 хлопчиків;
- б) не менше 30 і не більше 70.

Завдання 5. Верстат-автомат штампує деталі. Ймовірність того, що за зміну не буде випущено жодної нестандартної деталі, дорівнює 0,9. Знайдіть ймовірність того, що за три зміни не буде випущено жодної нестандартної деталі.

6. А) Скількома способами можна скласти розклад перздачі 5 заліків.

Б) У спортивній команді, яка складається з 22 чоловік, треба обрати капітана і його заступника. Скількома способами це можна зробити?

В) Скількома способами можна розмістити 6 хлопців та 7 дівчат у гуртожитку в тримісній, чотиримісній та ще двох Змісних кімнатах.

Семінарське заняття 4

Тема. Невизначений інтеграл. Комплексні числа. Лінійне програмування. Геометричний і симплексний методи розв'язування ЗЛП

Питання для усного опитування та дискусії

1. Задача інтегрального числення. Первісна.
2. Невизначений інтеграл, його властивості. Таблиця інтегралів.
3. Заміна змінних та інтегрування по частинах у невизначеному інтегралі.
4. Комплексні числа, операції над ними.
5. Задача математичного програмування.
6. Цільова функція.
7. Ресурсні обмеження.

Аудиторна письмова робота

Виконання студентами тестових та індивідуальних завдань з питань теми заняття. Семінарські/лабораторні та індивідуальні завдання містяться в Google Classroom в папці Семінарські/Лабораторні завдання.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є : первісна, інтеграл, таблиця інтегралів, безпосереднє інтегрування, метод підстановки (заміни змінних), інтегрування по частинах, комплексне число, алгебраїчна форма комплексного числа, тригонометрична форма комплексного числа, математичне програмування, модель, цільова функція, ресурсні обмеження, ключовий рядок, ключовий стовпчик, генеральний елемент.

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах:

Основна задача диференціального числення – це знаходження похідної або диференціала заданої функції. Сформулюємо обернену задачу по заданій похідній або диференціалу деякої невідомої функції потрібно знайти цю функцію. Інакше кажучи, маючи $dF(x) = f(x)dx$ або $F'(x) = f(x)$, потрібно знайти невідому функцію $F(x)$. Це – основна задача інтегрального числення.

Первісною функцією для даної функції $f(x)$ на даному проміжку називається така функція $F(x)$, похідна якої дорівнює $f(x)$ або диференціал якої дорівнює $f(x)dx$ на розглядуваному проміжку.

Основні властивості невизначеного інтеграла.

Враховуючи означення невизначеного інтеграла

$$\int f(x)dx = F(x) + c,$$

можна легко довести основні його властивості

- 1) Диференціал невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу, а похідна – підінтегральній функції:

$$d \int f(x)dx = f(x)dx, \quad \left(\int f(x)dx \right)' = f(x).$$

- 2) Невизначений інтеграл від диференціала неперервно диференційованої функції дорівнює самій цій функції з точністю до сталого доданка:

$$\int d\varphi(x) = \int \varphi'(x)dx = \varphi(x) + c.$$

Зауважимо, що в підкреслених виразах знаки d і $\int$ взаємно знищують один одного. В цьому розумінні, як вже згадувалося, диференціювання та інтегрування є взаємно оберненими математичними операціями.

- 3) Відмінний від нуля сталий множник можна виносити за знак невизначеного інтеграла:

$$\int Af(x)dx = A \int f(x)dx.$$

$$\text{Дійсно: } A \int f(x)dx = A(F(x) + c) = AF(x) + c_1 \quad (c_1 = AC).$$

При цьому $AF(x)$ – первісна для Af , оскільки $(AF)' = AF' = Af$.

- 4) Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми скінченного числа неперервних функцій дорівнює такій же алгебраїчній сумі невизначених інтегралів цих функцій.

Таблиця найпростіших інтегралів.

Безпосереднім диференціюванням перевіряється справедливність наступних табличних формул.

$$1. \int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + c \quad (m \neq -1).$$

$$2. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c \quad (x \neq 0).$$

$$3. \int e^x dx = e^x + c.$$

$$4. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad (a > 0, a \neq 1).$$

$$5. \int \cos x dx = \sin x + c.$$

$$6. \int \sin x dx = -\cos x + c.$$

$$7. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c.$$

$$8. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c.$$

$$9. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c.$$

$$10. \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c.$$

$$11. \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + c.$$

$$12. \int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + c.$$

$$13. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2+2} \right| + c \quad (\alpha \neq 0).$$

$$14. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c.$$

$$15. \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c.$$

$$16. \int \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + c.$$

$$17. \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c.$$

Інтегрування методом заміни змінної (способом підстановки) та по частинах.

Існує два основних методи інтегрування – метод заміни змінних (спосіб підстановки) а) та метод інтегрування по частинах б).

а) Нехай потрібно знайти $\int f(x)dx$, який не є табличним інтегралом (але відомо, що існує). Виконаємо в підінтегральному виразі заміну: $x = \varphi(t)$ (тут $\varphi(t)$ та $\varphi'(t)$ – неперервні функції, причому існує обернена функція $\varphi^{-1}(t)$).

Б) Формула інтегрування частинами: $\int u dv = uv - \int v du$.

Наприклад.

$$\text{№1. } \int x \sin x dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \sin x dx & v = -\cos x \end{array} \right| = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + c.$$

$$\text{№2. } \int \ln x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx & v = x \end{array} \right| = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + c.$$

Комплексним числом називається вираз виду $z=a+bi$, де a та b – дійсні числа.

Тут a -дійсні, а b -уявна частина комплексного числа, а $i = \sqrt{-1}$ -уявна одиниця (зауважимо, що деколи уявною частиною називають bi) Загальноприйняті такі позначення:

$$a = \operatorname{Re} z, b = \operatorname{Im} z$$

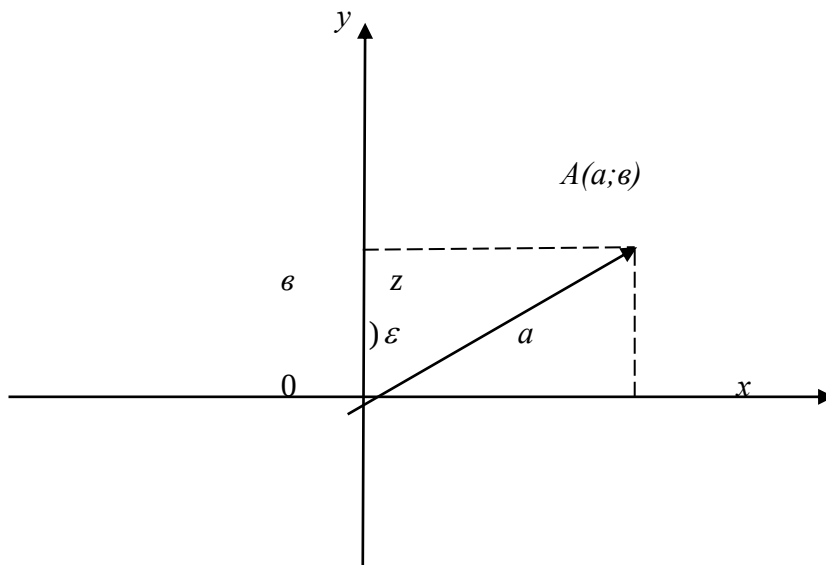
(вод re /el-дійсний, $imaginaire$ -уявний - дійсний,)

Два комплексних числа $z_1=a_1+bi_1$ та $z_2= a_2+bi_2$ вважаються рівними ($z_1= z_2$), якщо рівні їх дійсні та уявні частини:

$$a_1= a_2, b_1= b_2.$$

Комплексне число дорівнює нулю, якщо $a=b=0$ якщо $b=0$. то комплексне число співпадає з дійсним: $a+bi=a$. Якщо $a=0$, то $z=bi$ - одержуємо чисто уявне число. Числа $a \pm bi$ називаються спряженими. Число $z_1=-a-bi$ називається протилежними до числа z .

Комплексні числа можна зобразити точками площини (в той час, як дійсні числа-точками числової осі ox). Комплексне число $a+bi$ ототожнюються з парою чисел (a,b) координатами точки площини (в прямокутній декартовій системі координат $хоу$) оскільки кожній точці A площини відповідає радіус-вектор $\overrightarrow{OA}$, будь-яке комплексне число можна також інтерпретувати геометрично як вектор $\overrightarrow{OA}$ з координатами (a,b) (рис.1)



Розглянемо дії над комплексними числами в алгебраїчній формі.

Нехай задано два комплексних числа $z_1 = a_1 + b_1i$ та $z_2 = a_2 + b_2i$ (надалі така форма їх запису називається алгебраїчною). Означимо основні дії з ними-додавання, віднімання, множення і ділення.

1) Сумою $z_1 + z_2$ комплексних чисел z_1 і z_2 називається комплексне число z , дійсна частина якого дорівнює сумі дійсних частин, а уявна частина-сумі уявних частин чисел z_1 і z_2 : $z = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$

Операція додавання комплексних чисел асоціативна: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

та комутативна: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.

2) Різницею $z_1 - z_2$ комплексних чисел z_1 та z_2 називається комплексне число z , що є сумою числа z_1 та числа, протилежного до z_2 : $z = z_1 + (-z_2) = a_1 + b_1i + (-a_2 - b_2i) = a_1 - a_2 + (b_1 - b_2)i$.

3) Добутком $z_1 \cdot z_2$ комплексних чисел z_1 та z_2 називається комплексне число

$$z = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$$

Таким чином, добуток визначається за звичайними правилами алгебри:

$$z = z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = a_1a_2 - a_1b_2i + b_2b_1i^2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)i.$$

Операція множення комплексних чисел асоціативна:

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$$

та комутативна: $z_1z_2 = z_2z_1$.

4) Часткою $\frac{z_1}{z_2}$ комплексних чисел z_1 і z_2 називається комплексне число z таке, що $z_1 = z \cdot z_2 \cdot (z_2 \neq 0)$.

Практично комплексні числа ділять так:

$$\frac{a_1 + b_1i}{a_2 + b_2i} = \frac{(a_1 + b_1i)(a_2 - b_2i)}{(a_2 + b_2i)(a_2 - b_2i)} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + i(b_1a_2 - a_1b_2)}{a_2^2 - (b_2i)^2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}.$$

Додавання і множення комплексних чисел пов'язані законом дистрибутивності: $(z_1 + z_2)z_3 = z_1z_3 + z_2z_3$.

Практичне завдання:

I. Методи інтегрування

Завдання 1 Безпосереднє інтегрування

$$\int x^3 \sqrt[4]{x^5} dx =$$

$$\int (5 \sin x - 3 \cdot 4^x + \frac{1}{x}) dx =$$

$$\int (2x - 5)(x + 1) dx$$

Завдання 2

Метод підстановки (метод заміни змінної)

$$\int_0^1 (2x^3 - 1)x^2 dx$$

$$\int (2x - 5)^3 dx$$

$$\int e^{x^2-2} dx$$

Завдання 3

Метод інтегрування частинами

$$\int x^2 \sin 5x dx$$

$$\int (x - 1) \sin(2x - 1) dx$$

$$\int (2x^2 - 3x + 2)e^{2x} dx =$$

II. Дано комплексні числа z_1, z_2, z_3 . Знайти:

а) $z_1 + z_3$;

б) $z_2 \cdot z_3$;

в) $\frac{z_2}{z_3} - z_1$

г) $\frac{1}{z_1} + z_2$.

1. $z_1 = 7 + 6i$; $z_2 = 8 + 4i$; $z_3 = 10 - 6i$.

2. $z_1 = 8 + 6i$; $z_2 = 4 - 5i$; $z_3 = 9 - 3i$.

3. $z_1 = 7 + 8i$; $z_2 = 4 - 5i$; $z_3 = 7 - 9i$.

4. $z_1 = 9 + 6i$; $z_2 = 7 - 3i$; $z_3 = 8 - 5i$.

Математичне програмування — один із напрямків прикладної математики, предметом якого є задачі на знаходження екстремуму деякої функції за певних заданих умов.

У математичному програмуванні виділяють два напрямки — детерміновані задачі і стохастичні. Детерміновані задачі не містять випадкових змінних чи параметрів. Уся початкова інформація повністю визначена. У стохастичних задачах використовується вхідна інформація, яка містить елементи невизначеності, або деякі параметри набувають значень відповідно до визначених функцій розподілу випадкових величин. Наприклад, якщо в економіко-математичній моделі врожайності сільськогосподарських культур задані своїми математичними сподіваннями, то така задача є детермінованою. Якщо ж врожайності задані функціями розподілу, наприклад нормального з математичним сподіванням a і дисперсією D , то така задача є стохастичною.

Кожен з названих напрямків включає типи задач математичного програмування, які в свою чергу поділяються на інші класи. Схематично класифікацію задач зображено на рисунку (поділ наведений для детермінованих задач, але він такий же і для стохастичних).

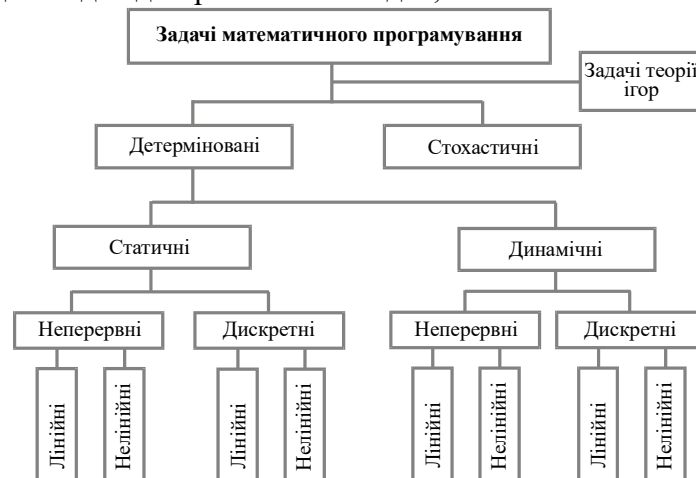


Рисунок Класифікація задач математичного програмування

Багатокомпонентність і велика розмірність систем, зокрема соціально-економічних, може значно ускладнити процес відображення мети та обмежень в аналітичному вигляді. Тому

виникає необхідність у проведенні процедури зменшення реальної розмірності задачі до таких меж, які б із достатнім ступенем точності адекватно відобразили реальну дійсність. Незважаючи на велике число змінних і обмежень, які на перший погляд слід враховувати в процесі аналізу реальних ситуацій, лише невелика їх частина виявляється суттєвою для опису поведінки досліджуваних систем. Тому при виконанні процедури спрощення опису реальних систем, на основі якої буде побудована модель, насамперед необхідно ідентифікувати домінуючі змінні, параметри та обмеження. Математична модель — це абстракція реальної дійсності (світу), в якій відношення між реальними елементами, а саме ті, що цікавлять дослідника, замінені відношеннями між математичними категоріями. Ці відношення зазвичай подаються у формі рівнянь і/чи нерівностей, відношеннями формальної логіки між показниками (змінними), які характеризують функціонування реальної системи, що моделюється.

Вже сама постановка питання щодо математичного моделювання будь-якого об'єкта породжує чіткий план дій, який умовно можна поділити на три етапи: модель — алгоритм — програма.

Кожна економічна система має певну мету свого функціонування. Це може бути, наприклад, отримання максимуму чистого прибутку. Ступінь досягнення мети, здебільшого, має кількісну міру, тобто може бути описаний математично.

Нехай F – вибрана мета (ціль). За цих умов вдається, як правило, встановити залежність між величиною F , якою вимірюється ступінь досягнення мети, вхідними змінними та параметрами системи:

$$F = f(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_m; c_1, c_2, \dots, c_l).$$

Функцію F називають цільовою функцією, або функцією мети. Для економічної системи це є функція ефективності її функціонування та розвитку, оскільки значення F відображує ступінь досягнення певної мети.

У загальному вигляді задача економіко-математичного моделювання формулюється так: знайти такі значення керованих змінних x_j , щоб цільова функція набувала екстремального (максимального чи мінімального значення).

Отже, потрібно відшукати значення

$$\max_{x_j} (\min) F^* = f(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_m; c_1, c_2, \dots, c_l).$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Характеристики	Витрати ресурсів в 1 кг своєї			Норми споживання								
2	риболовних	буряк	морква	пастушок									
3	A	3	2	4	710								
4	B	0.3	0.4	0.2	73								
5	C	20	18	10	4460								
6	Вартість	0.4	0.5	0.4									
7	Математична модель												
8	Змінні	x1	x2	x3									
9	Значення-к-ть	228	11	1									
10	Цільова функція												
11													
12	Обмеження												
13		710	710										
14		73	73										
15		4735	4460										
16													

1.4. Самостійна робота студентів

Самостійна робота студента є однією з основних складових оволодіння навчальним матеріалом і виконується в позааудиторний час, передбачений тематичним планом навчальної дисципліни.

Під час вивчення навчальної дисципліни студенти повинні навчитися самостійно мислити, поглиблювати засвоєні теоретичні знання, опановувати практичні навички з організації праці менеджера. Розв'язки завдань повинні бути стисло законспектовані у зошиті.

Студенти виконують самостійну роботу індивідуально з одержанням необхідних консультацій від науково-педагогічного працівника протягом семестру. Форма контролю – перевірка самостійних робіт. Завдання самостійної роботи виносяться на підсумковий семестровий контроль.

Для виконання завдання студент обирає варіант згідно наданими йому номером (в журналі) та параметром k .

Перша частина:

1. Обчислити визначники двома способами:

а) за допомогою елементарних перетворень;

б) розклавши за елементами рядка (стовпця)

$$\begin{vmatrix} 1 & k+2 & k+3 & -1 \\ -k-2 & 0 & -1 & k+4 \\ k & 1 & k+3 & -2 \\ k+2 & 7 & 1 & -k-4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} k & k+1 & k+2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ -k & k+2 & -k-2 & 0 \\ 4 & 4 & k & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 2+k \\ -k-1 & -k-2 & 1 & -1 \\ k & k+1 & k & 1 \\ k+1 & k+2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

2. Знайти добуток матриць AB і BA

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Розв'язати системи рівнянь:

а) за правилом Крамера; б) матричним способом; в) методом Гауса;

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + kx_3 = 18, \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 25, \\ x_1 + x_2 - (k-2)x_3 = 7. \end{cases} \begin{cases} kx_1 + 3x_2 - 2x_3 = 13, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -9, \\ (k+4)x_1 + x_2 + 3x_3 = 8. \end{cases}$$

4. Знайти границі функції, які відповідають Вашому варіанту.

$$1. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + x - 2}{x^2 - 2x - 3}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 5x + 2}{2x^2 - x - 1}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2 - 17x + 35}{x^2 - x - 20}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 + x - 5}{x^2 + x - 2}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x^2 + 4x - 1}{x^2 - 6x - 7}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 - 7x - 2}{x^2 - 7x + 10}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x - 3}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + x - 6}{2x^2 + 3x - 9}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 - 2x - 5}{x^2 + 5x + 4}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 14x - 5}{2x^2 - 9x - 5}.$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 - 7x + 6}.$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{x^2 - x - 6}.$$

$$13. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{3x^2 + 4x - 4}.$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 + 3x - 10}.$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 14x - 5}{2x^2 - 9x - 5}.$$

$$16. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x + 1}{x^3 + 2x - 4}.$$

$$17. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^2 + 4x - 3}{4x^2 - x - 6}.$$

$$18. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x - 3}{-5x^2 + x + 2}.$$

$$19. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 7x - 1}{x^4 - 6x + 1}.$$

$$20. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 - 4x + 1}{2x^3 + 2x - 4}.$$

5. Знайти похідні функцій, які відповідають Вашому варіанту.

1

$$. y = 2x^3 + 4\sqrt{x^7} - \operatorname{tg} x.$$

$$2. y = \frac{4}{x} - 3\sqrt[3]{x^2} + 3\sin x.$$

$$3. y = 3x^2 + 8\sqrt[4]{x} - 5\operatorname{arctg} x.$$

$$4. y = \frac{1}{4}x^4 - 2\sqrt{x} + \arcsin x.$$

$$5. y = \frac{5}{x^3} + 6\sqrt[3]{x} - 7\log_2 x.$$

$$6. y = \frac{2}{x^6} + 10\sqrt[5]{x} - 3e^x.$$

$$7. y = 2x^7 + 8\sqrt[4]{x^3} - \cos x.$$

$$8. y = \frac{8}{x} + 4\sqrt{x^3} + 2\ln x.$$

$$9. y = \frac{1}{2x^4} - 5\sqrt{x^2} + 6\sin x.$$

$$10. y = \frac{x^4}{2} + 6\sqrt[3]{x^2} - 3\cos x.$$

$$11. y = \frac{2}{x^3} + 5\sqrt{x^2} - 2\arccos x.$$

$$12. y = \frac{1}{3x} - 9\sqrt[3]{x^4} - 5 \cdot 4^x.$$

$$13. y = \frac{2}{5}x^5 + 8\sqrt{x} - 3\operatorname{arctg} x.$$

$$14. y = \frac{1}{2}x^4 + 6\sqrt{x^2} - 4\log_3 x.$$

$$15. y = 7x^3 + 3\sqrt{x^5} - 3^x.$$

$$16. y = \operatorname{tg}(3x^2 + x - 2).$$

$$17. y = \operatorname{arctg}(2x^2 - 1).$$

$$18. y = 3^{2x^3 - 4x + 3}.$$

$$19. y = \sqrt[5]{(2x^2 - 4x + 5)^2}.$$

$$20. y = \arccos(3x^2 + 5).$$

6. Обчислити інтеграли:

$$1. \int \left(3x^5 + \cos x - \frac{2}{x^2 - 9} \right) dx.$$

$$2. \int (4x^3 - 5e^x + 1) dx.$$

$$3. \int \left(\frac{3}{4}\sqrt{x} + 3^x - \sin x \right) dx.$$

$$4. \int \left(\frac{3}{\sqrt{9 - x^2}} + 4\operatorname{tg} x - 9 \right) dx.$$

$$5. \int \left(8x - \frac{9}{\cos^2 x} + 2 \right) dx.$$

$$6. \int \left(2x^3 - \sqrt{x} + \frac{4}{x} \right) dx.$$

$$7. \int (\sqrt[3]{x} - \operatorname{ctg} x + 3) dx.$$

$$8. \int \left(3x^2 - \frac{5}{\sin^2 x} + 4 \right) dx.$$

$$\begin{array}{ll}
9. \int \left(5x^4 - 3e^x + \frac{8}{x^3} \right) dx . & 10. \int \left(\cos x - \frac{4}{x^2 + 16} + x \right) dx . \\
11. \int \left(5x - 3\operatorname{ctgx} + \frac{4}{x^3} \right) dx . & 12. \int \left(4^x - \frac{2}{\sqrt{x^3}} + 1 \right) dx . \\
13. \int \left(x^2 - \frac{3}{\sin^2 x} - 5 \right) dx . & 14. \int \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2x^5 + 3}{x} dx . \\
15. \int \left(2x^3 - \frac{4}{\sqrt{5+x^2}} + 7 \right) dx . & 16. \int \left(4x^5 + \frac{6}{\cos^2 x} - 5 \right) dx . \\
17. \int \left(7\sqrt[4]{x^3} - 3e^x + \frac{4}{x} \right) dx . & 18. \int (3x^2 - 5\operatorname{tg} x + 2) dx . \\
19. \int \left(7x^6 + \frac{3}{x^2 - 9} + 2 \right) dx . & 20. \int \left(5x^4 + 4\sin x - \frac{2}{x} \right) dx .
\end{array}$$

Індивідуальні завдання

З цієї навчальної дисципліни можливе (за бажанням студента) виконання наукових робіт за наступною орієнтовною тематикою:

Теми рефератів

1. Способи розв'язування систем рівнянь.
2. Розв'язування вправ з аналітичної геометрії.
3. Границя функції однієї і двох змінних.
4. Застосування диференціального числення.
5. Дії з комплексними числами.
6. Основні прийоми інтегрування.
7. Ознаки збіжності числових рядів.
8. Розв'язування диференціальних рівнянь першого порядку.
9. Розв'язування диференціальних рівнянь вищих порядків.
10. Елементи комбінаторики (розв'язування вправ).
11. Основні теореми теорії ймовірностей.
12. Статистичні оцінки параметрів розподілу.
13. Приклади задач математичного програмування.
14. Задачі дослідження операцій.
15. Розв'язування вправ на СМО.
16. Ігрові задачі з умовами невизначеності та ризику.
17. Основні прийоми розв'язання задач логістики.
18. Використання векторної алгебри, теорії матриць і визначників у економіці.
19. Відшукування границь послідовностей.
20. Застосування похідної в економіці.
21. Задачі лінійного програмування.
22. Задачі, що розв'язуються за транспортним алгоритмом.
23. Задачі цілочислового програмування.
24. Моделі управління запасами.
25. Методи сітьового планування і управління.
26. Дослідження економічних моделей з урахуванням ризику.

1.5. Підсумковий контроль

Підсумковий семестровий контроль проводиться у формі усно-письмового екзамену.

1.5.1. Питання для підсумкового контролю

1. Поняття визначника. Обчислення визначників другого і третього порядків та їх властивості.
2. Поняття про мінори та алгебраїчні доповнення
3. Розклад визначника за елементами його стрічки (стовбця).
4. Обчислення визначників довільного порядку
5. Визначення матриці, їх види
6. Дії над матрицями
7. Обернена матриця та її знаходження
8. Економічні задачі з використанням теорії матриць
9. Системи лінійних рівнянь
10. Метод Крамера.
11. Матричний спосіб розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь
12. Метод Гаусса та Жордано-Гауса
13. Поняття функції. Область визначення і область значень функції. Способи задання функції.
14. Класифікація функцій. Основні функції та їх графіки
15. Умови зростання і спадання функції. Найбільше і найменше значення функції на відрізьку.
16. Поняття екстремуму функції. Необхідні та достатні умови екстремуму.
17. Опуклість і вгнутість графіка функції. Точки перегину. Необхідні і достатні умови їх існування на графіках функції.
18. Асимптоти графіка функції, їх знаходження. Повне дослідження функції та побудова її графіка.
19. Границя числової послідовності. Основні теореми про границі числових послідовностей.
20. Границя функції в точці. Поняття про односторонні границі
21. Основні теореми про границі функцій.
22. Перша і друга визначні границі
23. Визначення неперервної функції в точці. Класифікація точок розриву
24. Властивості неперервних функцій на відрізьку
25. Означення похідної. Геометричний зміст похідної.
26. Фізичний та економічний зміст похідної
27. Зв'язок між неперервністю та диференційованістю функції
28. Правила диференціювання суми, добутку, частки функцій
29. Похідна від складної функції. Похідна від оберненої функції. Похідні від обернених тригонометричних функцій.
30. Таблиця похідних. Похідні вищих порядків.
31. Означення диференціала. Геометричний зміст диференціала. Основні властивості диференціала
32. Еластичність функції та її властивості. Еластичність попиту відносно ціни. Еластичність пропозиції відносно ціни.
33. Первісна функції та її властивість
34. Невизначений інтеграл та його властивості
35. Таблиця невизначених інтегралів.
36. Методи інтегрування: безпосереднє інтегрування.
37. Методи інтегрування: метод підстановки та інтегрування частинами
38. Поняття раціонального дробу. Інтегрування найпростіших раціональних дробів.
39. Інтегрування правильних раціональних дробів. Інтегрування неправильних раціональних дробів.
40. Поняття визначеного інтегралу та його властивості.
41. Основні поняття про диференціальні рівняння.
42. Диференціальні рівняння першого порядку.
43. Однорідні та лінійні диференціальні рівняння.

- 44. Диференціальні рівняння другого порядку
- 45. Числовий ряд та його збіжність.
- 46. Необхідна та достатня ознаки збіжності числового ряду. Ознака порівняння рядів.
- 47. Лінійне програмування.
- 48. Геометричний і симплексний методи розв'язування ЗЛП
- 49. Оптимізаційні економіко-математичні моделі
- 50. Транспортна задача. Метод потенціалів

1.5.2. Структура екзаменаційного білета

1. Поняття визначника. Обчислення визначників другого і третього порядків та їх властивості
Правила диференціювання суми, добутку, частки функцій.

2. Розв'язати систему рівнянь за правилом Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + kx_3 = 18, \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 25, \\ x_1 + x_2 - (k - 2)x_3 = 7. \end{cases}$$

3. Обчислити інтеграл (метод заміни змінної) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}} dx$

2.Схема нарахування балів

2.1. Нархування балів студентам з навчальної дисципліни здійснюється відповідно до такої схеми:

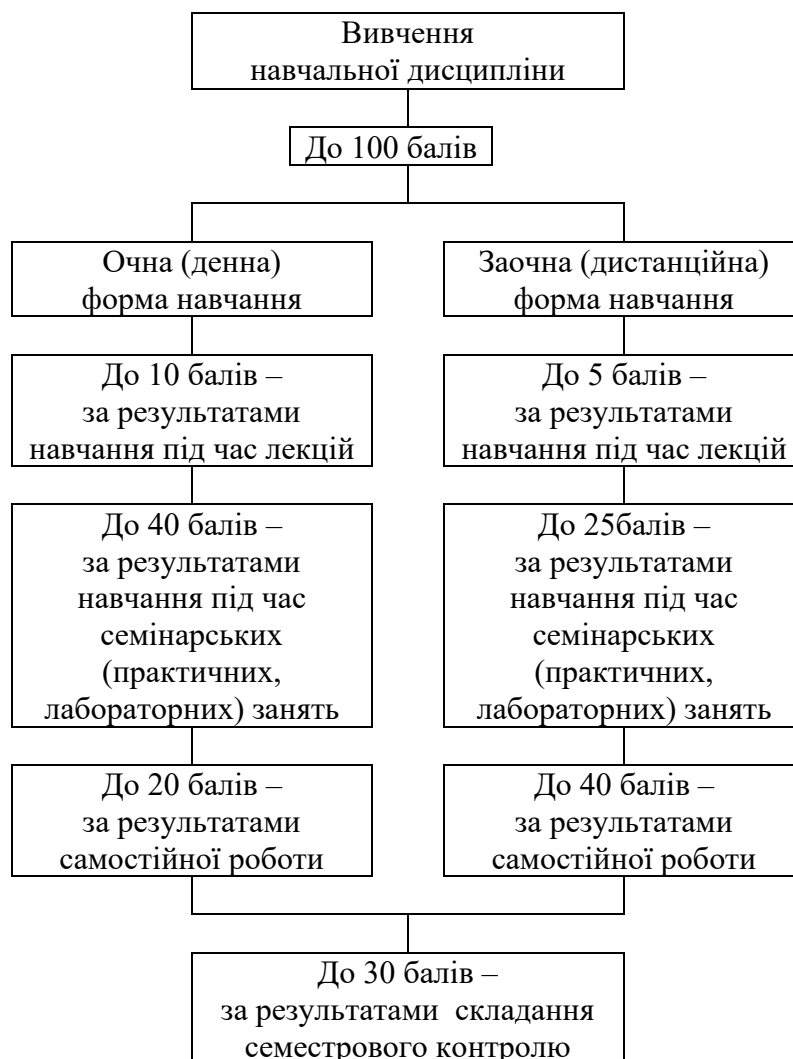


Рис. 1. Схема нарахування балів студентам за результатами навчання

2.2. Обсяг балів, здобутих студентом під час лекцій з навчальної дисципліни, обчислюється у пропорційному співвідношенні кількості відвіданих лекцій і кількості лекцій, передбачених навчальним планом, і визначається згідно з додатками 1 і 2 до Положення про організацію освітнього процесу в Хмельницькому університеті управління та права імені Леоніда Юзькова.

З цієї навчальної дисципліни передбачено проведення п'яти лекційних занять за заочною формою навчання.

Отже, студент може набрати під час лекцій таку кількість балів:

Форма навчання	Кількість лекцій за планом	Кількість відвіданих лекцій				
		1	2	3	4	5
Заочна	5	2	4	6	8	10

2.3. З цієї навчальної дисципліни передбачено проведення 4 семінарських занять за денною формою навчання.

За результатами семінарського (практичного, лабораторного) заняття кожному студенту до відповідного документа обліку успішності виставляється кількість балів від 0 до 5 числом, кратним 0,5, яку він отримав протягом заняття.

Критерії поточного оцінювання знань студентів наведені у п.4.3.8. Положення про організацію освітнього процесу в Хмельницькому університеті управління та права (затвердженого 29 травня 2017 року, протокол № 14).

2.4. Перерозподіл кількості балів в межах максимально можливої кількості балів за самостійну роботу студентів та виконання індивідуальних завдань, наведено в наступній таблиці:

№ з/п	16 тем	Номер теми										Усього балів
		1-2	3	4-5	6-7	8-9	10-11	12-13	14	15	16	
1.	Максимальна кількість балів за виконання завдання самостійної роботи	2	2	2	2	2	2	2	4	2	4	24
2.	Максимальна кількість балів за індивідуальне завдання	16										16
	Усього балів	-										40

2.5. За семестровий контроль, що проводиться у формі семестрового екзамену з навчальної дисципліни студент може максимально одержати 30 балів. Шкала визначення кількості балів та критерії оцінювання знань студентів за результатами семестрового контролю подана у табл. 4.8 Положення про організацію освітнього процесу в Хмельницькому університеті управління та права імені Леоніда Юзькова.

Перерозподіл балів, в межах максимально можливого одержання їх кількості за надані студентами відповіді в усній формі на завдання екзаменаційного білета, наведено в таблиці.

№ з/п	Алгоритм нарахування балів	Номер питань екзаменаційного білета			Разом балів
		1	2	3	
1.	Максимальна кількість балів за відповідь на питання білету	5	10	15	30,0

3. Рекомендовані джерела

3.1. Основні джерела

1. Барабаш О.В., Мусієнко А.П., Собчук В.В. Вища математика для економістів. 2019.
URL:<http://www.dut.edu.ua/ru/lib/1/category/725/view/1883>
2. Барковський В.В. Вища математика для економістів: навчальний посібник / В.В. Барковський, Н.В. Барковська. К.: Центр учбової літератури, 2010. 448 с.
URL:<https://app.box.com/s/dwv9reh2y2eek18zynw2pn8xohruvm2i>
3. Бугір М.К. Математика для економістів: Посібник. К.:Видав.центр Альматеор, 2003. 520 с.
URL:<http://lib.istu.edu.ua/index.php?p=34&id=1134&par=223&page=1>
4. Дубовик В.П. Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. К. : Ігнатекс-Україна, 2013. 150 с.
5. Гречнева М. О., Стеганцева П. Г. Вища математика : навчальний посібник для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра другої предметної спеціальності «Середня освіта (Інформатика)». Запоріжжя : ЗНУ, 2023. 154 с.
6. Дюженкова О.Ю. Вища математика. Практикум. Навчальний посібник / О.Ю. Дюженкова, М.Є. Дудкін, І.В. Степахно. К.: НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», 2021. 409 с. Бібліогр.: 409 с.
URL <https://ela.kpi.ua/server/api/core/bitstreams/e193d048-1bd7-4120-b86a-f65337aa5493/content>
7. Кацала Р.А. Математика для економістів (Методичні вказівки до практичних занять для студентів економічних спеціальностей). Ч. 2. Теорія ймовірностей і математична статистика / Уклад.: Р.А. Кацала, Ю.Ю. Млавець, О.О. Синявська, М.М. Шаркаді. Ужгород: ДВНЗ “УжНУ”, 2024. 60 с.
8. Рудницький В.Б. Вища математика: навчальний посібник / В.Б. Рудницький, В.І. Делей. Хмельницький, 2004. 308с.
URL:<https://studfile.net/preview/5064960/>
9. Чемерис О. Вища математика : навчально-методичний посібник для організації самостійної роботи здобувачів нематематичних спеціальностей. Частина 1. Житомир : Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2024. 49 с.
10. Хом'юк, І. В. Вища математика. Частина 1. Лінійна алгебра та аналітична геометрія : практикум / І. В. Хом'юк, В. В. Хом'юк. – Вінниця : ВНТУ, 2020. – 70 с. ISBN 978-966-641-799-5
11. Хом'юк, І. В. Вища математика. Ч. 1. Функції багатьох змінних : практикум / І. В. Хом'юк, В. В. Хом'юк. – Вінниця : ВНТУ, 2020. – 70 с. ISBN 978-966-641-799-5
12. Шелестовський Б.Г. Вища математика: теорія ймовірностей та математична статистика. Навчальний посібник / Шелестовський Б.Г., Габрусєв Г.В., Габрусєва І.Ю. Тернопіль: СМП "Тайп", 2023. 142 с.

3.2. Допоміжні джерела

13. Булдигін В.В. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Навч. посібник / В. В. Булдигін, І. В. Алексєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Н. Р. Коновалова, Л. Б. Федорова; за ред. проф. В. В. Булдигіна. К. : ТВіМС, 2021. 224 с.
URL: <http://matan.kpi.ua/public/files/Posibnyk%20LA+AG.pdf>
14. Денисенко Н.Л. Вища математика. Елементи лінійної і векторної алгебри, аналітична геометрія. Практикум: навч. посіб. КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: Н. Л. Денисенко, В. Ф. Зражевська. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024. 168 с.
URL: <https://ela.kpi.ua/bitstreams/d90613a4-0079-47dd-bb6a-8f482ec9ee70/download>

15. Нечипоренко Н.О. Індивідуальні розрахунково-графічні завдання з дисципліни «Вища математика» для студентів економічних спеціальностей денної форми навчання / Укл.: Нечипоренко Н.О. – Запоріжжя: НУ “Запорізька політехніка”, 2024. – 54 с.
16. Вища математика. Модуль 1. Лінійна, векторна алгебра та аналітична геометрія: Навч. посібник / Антоненко В.Ф., Ключ І.С., Горідько Р.В., Чуб Л.О. К. : Книжкове вид-во НАУ, 2006. 300 с.
17. Вища математика. Модуль 2. Вступ до математичного аналізу. Диференційне числення функцій однієї змінної: Навч. посібник / Крисак Я.В., Левковська Т.А., Горідько Р.В. [та ін.] К. : НАУ-друк, 2006. 284 с.
18. Вища математика. Модуль 3. Невизначений та визначений інтеграли: Навч. посібник / Ластівка І.О., Коновалюк В.С., Ковтонюк І.Ю. [та ін.] К. : НАУ-друк, 2007. 208 с.
19. Лубенська Т.В. Вища математика. Модуль 4. Диференціальне числення функцій багатьох змінних: Навч. посібник / Т.В. Лубенська, Л.Д. Чупаха, В.І. Трофименко К. : Книжкове вид-во НАУ, 2006. 116 с.
20. Грищенко В.О., Юхименко А.І. Теорія ймовірностей і математична статистика для економістів: навчальний посібник / В.О. Грищенко, А.І. Юхименко. – К.: Київський національний торгово-економічний університет, 2000. 168с.
21. Наконечний С.І., Савіна С.С. Математичне програмування: навчальний посібник/ С.І. Наконечний, С.С. Савіна. К.: КНЕУ, 2003. 452с.

4. Інформаційні ресурси в Інтернеті

1. Офіційний сайт Електронна платформа вищої математики, математичного моделювання та фізики URL: <https://duikt.edu.ua/ua/>
2. Офіційний сайт Інституту економіки та прогнозування Національної академії наук України. URL: <http://ief.org.ua>
3. Офіційний сайт Інституту економічних досліджень та політичних консультацій. URL: <http://www.ier.com.ua>
4. Офіційний сайт Міжнародного валютного фонду. URL: <http://www.imf.org/external/>
5. Офіційний сайт Міністерства розвитку економіки, торгівлі та сільського господарства України. URL: <http://www.me.gov.ua>.